УДК 514

ИНВЕРСИЯ ОТНОСИТЕЛЬНО АБСОЛЮТА РАСШИРЕННОЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ ПЛОСКОСТИ

Ромакина Л.Н., доцент,
Саратовский государственный университет, г. Саратов
romakinaln@mail.ru

Аннотация. Инверсия относительно абсолюта расширенной гиперболической плоскости определена как предельный случай инверсии относительно гиперцикла гиперболической плоскости $\hat{H}$ положительной кривизны. Представлены серии разбиений плоскости Лобачевского гармоническими параболами, инверсные разбиениям плоскости $\hat{H}$, порожденным правильным n-контуром. Все объекты рассмотрены в проективной модели Кэли-Клейна.

Ключевые слова: плоскость Лобачевского, модель Клейна плоскости Лобачевского, гиперболическая плоскость положительной кривизны, расширенная гиперболическая плоскость.

INVERSION WITH RESPECT TO THE ABSOLUTE OF EXTENDED HYPERBOLIC PLANE

L.N. Romakina, associate professor,
Saratov State University, Saratov
romakinaln@mail.ru

Abstract. An inversion with respect to the absolute of an extended hyperbolic plane is defined as the limit case of an inversion with respect to the hypercycle of a hyperbolic plane $\hat{H}$ of positive curvature. Series of partitions of the Lobachevskii plane by harmonious parabolas are presented. These partitions are inverse to the partitions of the plane $\hat{H}$ by the regular n-contours. All objects are considered in the projective Cayley-Klein model.

Keywords: Lobachevskii plane, Cayley-Klein model of the Lobachevskii plane, hyperbolic plane of positive curvature, extended hyperbolic plane.

1. Постановка задачи. В проективной модели Кэли-Клейна плоскость Лобачевского Λ_2 реализуется на проективной плоскости внутри овальной линии γ [1, 2]. На идеальной области плоскости Лобачевского реализуется гиперболическая плоскость $\hat{H}$ положительной кривизны [3, 4]. Плоскости Λ_2 и $\hat{H}$ являются связными компонентами расширенной гиперболической плоскости H^2 [5]. Линию γ называют *абсолютом* плоскостей Λ_2, $\hat{H}$ и H^2, а группу проективных автоморфизмов линии γ – *фундаментальной группой* преобразований этих плоскостей.

Пусть S – точка плоскости Лобачевского. *Гиперциклом* плоскости $\hat{H}$ называют множество всех точек этой плоскости, расстояние от которых до точки S равно постоянному значению $r = i\pi\rho - h$, где $h \in R_+$, ρ – радиус кривизны плоскостей Λ_2 и $\hat{H}$. Точку S называют *центром*, а поляру l этой точки относительно абсолюта – *базой* гиперцикла. Число r (h) называют *радиусом* (*высотой*) гиперцикла.

В работе [6] введена и исследована инверсия относительно гиперцикла плоскости $\hat{H}$. В данной работе рассмотрим предельный случай инверсии относительно гиперцикла, полагая, что базовый гиперцикл инверсии совпадает с абсолютом плоскости. В работах [7, 8] построены серии разбиений плоскости $\hat{H}$, порожденных правильным n-контуром. Здесь мы построим образы таких разбиений при инверсии относительно абсолюта.

2. Определение инверсии относительно абсолюта. Пусть S – внутренняя точка относительно абсолюта плоскости H^2, а M – произвольная точка этой плоскости. Точку M' пересечения прямой MS с полярой точки M относительно абсолюта назовем *инверсной* точке M относительно абсолюта. Из плоскости H^2 исключим точку S и прямую l, полученное множество обозначим W: $W = H^2 \backslash \{S, l\}$. Преобразование I множества W назовем *инверсией* с центром S относительно абсолюта, если каждая точка множества W в преобразовании I переходит в инверсную ей точку.

В каноническом репере R* = {A_1, A_2, S, E} первого типа плоскости H^2 инверсия I с центром S относительно абсолюта задана формулами:

$$\lambda x_1 = x_1, \qquad \lambda x_2 = x_2, \qquad \lambda x_3 = \frac{x_1^2+x_2^2}{x_3}, \tag{1}$$

полученными из формул (2.4) работы [2] предельным переходом при условии $h \to \infty$, характеризующем стремление базового гиперцикла к абсолюту.

3. Свойства инверсии относительно абсолюта. На основании свойств инверсии относительно гиперцикла (см. [6]) справедливы следующие свойства инверсии I относительно абсолюта.

1^0. При инверсии I относительно абсолюта гиперцикл высотой h плоскости Ĥ переходит в окружность радиуса ($-h$) плоскости Лобачевского.

2^0. Горизонт базы инверсии I совпадает с абсолютом плоскости Ĥ.

3^0. При инверсии I прямая, проходящая через центр инверсии, переходит в себя.

4^0. При инверсии I гиперболическая прямая плоскости Ĥ переходит в гиперболу данной плоскости.

5^0. При инверсии I эллиптическая прямая плоскости Ĥ переходит в эллипс плоскости Лобачевского.

Покажем, что параболическая прямая плоскости Ĥ при инверсии I относительно абсолюта преобразуется в параболу. Действительно, а репере R* первого типа абсолют плоскости H^2 задан уравнением

$$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0. \tag{2}$$

Не нарушая общности рассуждений, выберем параболическую прямую m, проходящую через точку E_{13} (1: 0: 1) на абсолюте. В репере R* такую прямую можно задать уравнением $x_1 - x_3 = 0$. В преобразовании I, заданном формулами (1), прямая m переходит в линию, заданную уравнением

$$x_1^2 + x_2^2 - x_1 x_3 = 0. \tag{3}$$

Исследуя взаимное положение линий (2), (3), находим их общие точки: E_{13}, J_1 (i: 1: 0), J_2 ($-i$: 1: 0). Прямая m является общей касательной линии (3) и абсолюта. Согласно классификации овальных линий плоскости H^2 линия (3) является параболой. Эллиптическую прямую J_1J_2 назовем *мнимой осью* параболы (3), а параболическую прямую m – *базой* данной параболы. Точку пересечения мнимой оси с базой будем называть *коцентром*, а поляру коцентра параболы относительно абсолюта – *вещественной осью* параболы. Точку пересечения параболы с ее вещественной осью назовем *вершиной* параболы.

Парабола (3) обладает тем свойством, что полюс ее мнимой оси относительно абсолюта совпадает с вершиной параболы. Такие параболы будем называть *гармоническими*. Итак, отмечая лишь основные этапы рассуждений, доказали следующее свойство инверсии I относительно абсолюта.

6^0. При инверсии I параболическая прямая плоскости Ĥ переходит в гармоническую параболу плоскости Лобачевского.

4. Образ правильного *n*-контура плоскости Ĥ при инверсии I. Пусть S – точка плоскости Лобачевского. Выберем на абсолюте γ последовательность точек K_1, K_2, ... , Kn так, чтобы лучи SK_1, SK_2, ... , SKn разделяли угол вокруг точки S на n конгруэнтных между собой углов. При этлм считаем, что $K_{nt+j} = K_j$, t Є N, j = 1, ... , n. Через точки K_1, K_2, ... , Kn проведем параболические прямые k_1, k_2, ... , kn соответственно. Точки попарного пересечения прямых k_1, k_2, ... , kn обозначим следующим образом:

$$k_j \cap k_{j+p} = A_j^p. \tag{3}$$

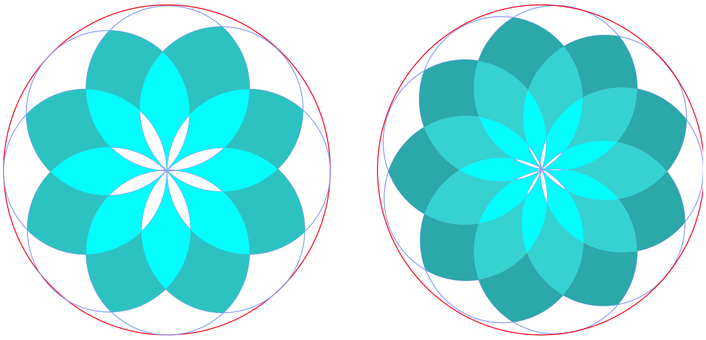
Упорядоченную последовательность отрезков $A_1^1A_2^1$, $A_2^1A_3^1$, ... , $A_n^1A_1^1$ параболических прямых назовем правильным n-контуром и обозначим F (см. [8]). Число n назовем *размерностью*, точку S – *центром*, поляру l точки S относительно абсолюта – *базой*, точки A_1^p, $A_2^p, \dots$, A_n^p – *вершинами порядка* p правильного n-контура F.

В работе [8] доказано, что вершины одного порядка правильного n-контура принадлежат одному гиперциклу с центром в центре данного контура.

Простые 4-контуры $F_\mu^p = A_\mu^{p+1}\, A_\mu^{p+2}\, A_{\mu+1}^{p+1}\, A_{\mu+1}^{p}$ плоскости Ĥ (см. определение в [9]) называют *составляющими* 4-контурами порядка p правильного n-контура F. Все составляющие 4-контуры одного порядка образуют *кольцо* правильного n-контура, порядок кольца совпадает с порядком составляющих его 4-контуров.

Ребра простых 4-контуров принадлежат параболическим прямым. Следовательно, при инверсии I относительно абсолюта простой 4-контур плоскости $\hat{H}$ переходит в область плоскости Лобачевского, ограниченную четырьмя гармоническими параболами.

На рис. 1 представлены образы при инверсии I относительно абсолюта первого и второго колец правильного 8-контура (a) и первого, второго и третьего колец правильного 9-контура плоскости $\hat{H}$ (b).



a b

Рис. 1. Образы при инверсии I колец правильного *n*-контура плоскости $\hat{H}$, *n* = 8 (a), *n* = 9 (b)

В исследовании разбиений плоскости Лобачевского гармоническими параболами, полученных при инверсии I относительно абсолюта из разбиений, порожденных правильным n-контуром, интересным представляется вопрос о зависимости между площадью (см. [10, 11]) составляющего 4-контура порядка p правильного n-контура плоскости $\hat{H}$ и его образа при инверсии I.

Литература

1. Ефимов Н.В. Высшая геометрия / Н.В. Ефимов. – М.: Наука, 1971. – 576 с.
2. Клейн Ф. Неевклидова геометрия / Ф. Клейн. М.; Л.: ОНТИ, 1936. – 356 с.
3. Ромакина Л.Н. Геометрия гиперболической плоскости положительной кривизны. Ч. 1: Тригонометрия / Л.Н. Ромакина. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2013. – 274 с.
4. Ромакина Л.Н. Геометрия гиперболической плоскости положительной кривизны. Ч. 2: Преобразования и простые разбиения / Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2013. – 244 с.
5. Розенфельд Б.А. Неевклидовы пространства / Б.А. Розенфельд. – М.: Наука, 1969. – 548 с.
6. Romakina L.N. Inversion with respect to the hypercycle of a hyperbolic plane of positive curvature / J. of Geom. – 2016. – Vol. 107. – No 1. – P. 137-149.
7. Ромакина Л.Н. Разбиения гиперболической плоскости положительной кривизны, порожденные правильным n-контуром // Теория относительности, гравитация и геометрия. Труды междунар. конф. "Petrov 2010 anniversary symposium on general relativity and gravitation" (Казань, 1–6 ноября 2010 г.). Ред., сост.: А.В. Аминова, С.В. Сушков. Казань: Казанский (Приволжский) федеральный университет, 2010. – С. 227-232.
8. Ромакина Л.Н. Простые разбиения гиперболической плоскости положительной кривизны / Л.Н. Ромакина // Матем. сб. – 2012. – Т. 203. – Вып. 9. – С. 83-116.
9. Ромакина Л.Н. Конечные замкнутые 3(4)-контуры расширенной гиперболической плоскости / Л.Н. Ромакина // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. – 2010. – Т. 10. – Вып. 3. – С. 14-26.
10. Ромакина Л.Н. О площади простого 4-контура гиперболической плоскости положительной кривизны / Л.Н. Ромакина // Ломоносовские чтения на Алтае: Сб. научн. статей междун. конф. – 2014. – С. 346-353.
11. Ромакина Л.Н. К теории площадей гиперболической плоскости положительной кривизны / Л.Н. Ромакина // Publ. Inst. Math.-Beograd. – 2016. – Т. 99. – № 113. – С. 139-154.